نام دبیر : مهندس مهدی باباخانی

عنوان آزمون : هومورک ۳ نوسان

۱ جسمی به جرم M از فنری با سختی K آویزان است. برای این سیستم کدام گزینه درست است؟

۱) اگر جرم M زیاد شود، فرکانس تغییر نمی‌کند.

۲) دامنهٔ حرکت به دورهٔ تناوب بستگی دارد.

۳) اگر طول فنر نصف شود، فرکانس نوسان تغییر می‌کند.

۴) انرژی پتانسیل سیم ثابت است.

پاسخ: **۳** گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱: نادرست است چون $f = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$

گزینه ۲: نادرست است چون دامنه همواره ثابت است.

گزینه ۴: نادرست است چون x متغیر است. $E_P = \frac{۱}{۲}\text{Kx}^۲$

۲ معادله‌ی شتاب - مکان نوسانگری ساده وزنه‌ی فنری به جرم ۱۰۰ گرم در SI به‌صورت $a = -۱۰۰\pi^۲ x$ است. ثابت این فنر چند $\frac{N}{m}$ است؟

۱) ۱۰۰

۲) ۲۰۰

۳) ۳۰۰

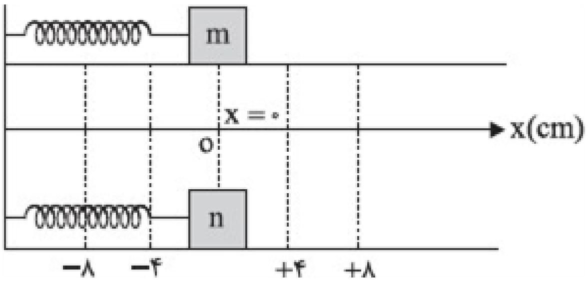
۴) ۵۰

پاسخ: **۱** گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} a = -۱۰۰\pi^۲ x \\ a = -\omega^۲ x \end{cases} \Rightarrow \omega = ۱۰\pi \frac{\text{rad}}{s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow ۱۰\pi = \sqrt{\frac{k}{۰/۱}} \Rightarrow k = ۱۰۰\pi^۲ \times ۰/۱ = ۱۰۰\frac{N}{m}$$

۳ در شکل مقابل دو نوسانگر جرم و فنر کاملاً مشابه m و n درحال تعادل هستند. نوسانگر m را تا $x = +۸\,\text{cm}$ می‌کشیم و نوسانگر n را تا $x = -۴\,\text{cm}$ فشرده می‌کنیم. حال دو نوسانگر را رها می‌کنیم. دوره‌ی نوسانگر m چند برابر دوره‌ی نوسانگر n است؟



۱) ۱

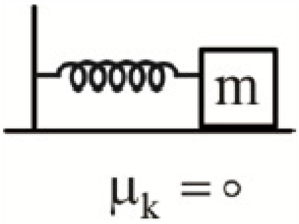
۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۲

۴) ۴

پاسخ: **۱** گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دقت کنید دوره هیچ ارتباطی به دامنه ندارد و با توجه به رابطه‌ی $T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ دوره‌ی حرکت دو نوسانگر یکسان است.

۴ مطابق شکل مقابل جسمی به جرم ۲ kg را به فنری متصل می‌کنیم و پس از کشیدگی از نقطه‌ی تعادل رها می‌کنیم تا نوسان کند. اگر دوره‌ی تناوب نوسان $۱/۲۵۶s$ باشد، ضریب سختی فنر چند $\frac{N}{m}$ است؟



- **۱** ۲۵
- **۲** ۵۰
- **۳** ۷۵
- **۴** ۱۰۰

پاسخ: **۲** گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$۱/۲۵۶ = ۲\times۳/۱۴\times\sqrt{\frac{۲}{k}} \Rightarrow ۱/۲۵۶ = ۶/۲۸\sqrt{\frac{۲}{k}} \Rightarrow \sqrt{\frac{۲}{k}} = \frac{۱/۲۵۶}{۶/۲۸} \Rightarrow \sqrt{\frac{۲}{k}} = ۰/۲$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{۲}{k} = ۰/۰۴ \Rightarrow k = \frac{۲}{۰/۰۴} = ۵۰\frac{N}{m}$$

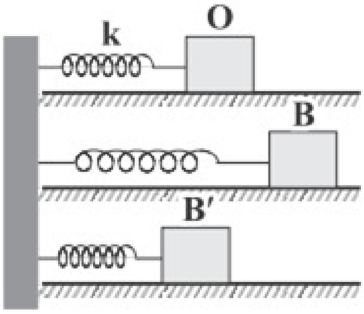
۵ در شکل زیر، وزنه‌ی ۳ کیلوگرمی را به اندازه‌ی ۵cm از وضع تعادل (نقطه‌ی O) تا نقطه‌ی B می‌کشیم و سپس رها می‌کنیم. این وزنه بین B تا B' حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر این وزنه، هر ۲ ثانیه از وضع تعادل بگذرد، چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟

الف) از B تا O، بردار شتاب و سرعت هم‌سو هستند.

ب) بیشترین تندی جسم، ۵π سانتی‌متر بر ثانیه است.

ج) ثابت فنر، برابر با $\frac{۳\pi^{۲}}{۴}$ نیوتون بر متر می‌باشد.

د) از B' تا O، شتاب متوسط، برابر با $+۲/۵\pi$ سانتی‌متر بر مجذور ثانیه است.



۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: **۲** گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:

الف) از B تا O، تندی جسم در حال افزایش است، پس حرکت، تندشونده است و در حرکت تندشونده، بردار سرعت و شتاب هم‌سو هستند. (✓)

ب) بیشترین تندی برابر با $\text{A}\omega$ است که طبق متن سؤال $A=۵\text{cm}$ است. همچنین در حرکت نوسانی، جسم با فاصله‌ی زمانی $\frac{T}{۲}$ از مرکز نوسان می‌گذرد.

در نتیجه داریم:
$$\frac{T}{۲}=۲\text{s}\Rightarrow T=۴\text{s}$$

بنابراین:
$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\left(\frac{\text{rad}}{s}\right)$$

پس $v_{\max}$ برابر است با:
$$\Rightarrow v_{\max}=\text{A}\omega\xrightarrow[\omega=\frac{\pi}{۲}\left(\frac{\text{rad}}{s}\right)]{A=۵\text{cm}}v_{\max}=۵\times\frac{\pi}{۲}=۲/۵\pi\frac{\text{cm}}{s}\quad(\times)$$

ج) می‌دانیم ثابت فنر از رابطه‌ی $k=\text{m}\omega^{۲}$ به دست می‌آید، پس:
$$k=\text{m}\omega^{۲}\xrightarrow[\omega=\frac{\pi}{۲}\left(\frac{\text{rad}}{s}\right)]{m=۳\ \text{kg}}k=۳\times\left(\frac{\pi}{۲}\right)^{۲}=\frac{۳\pi^{۲}}{۴}\frac{N}{m}\ (✓)$$

د) سرعت وزنه در نقطه‌ی B' صفر است و در نقطه‌ی O برابر $+\text{A}\omega$ است (علت مثبت بودن این است که جهت حرکت به سمت راست می‌باشد). همچنین فاصله‌ی زمانی از B' تا O برابر با $\frac{T}{۴}$ است، پس داریم:

$$\begin{cases}\Delta\text{t}=\frac{T}{۴}=\frac{۴}{۴}=۱\text{s}\\ v_{B'}=۰\\ v_O=+\text{A}\omega=۲/۵\,\pi\,\frac{\text{cm}}{s}\end{cases}\Rightarrow a_{\text{av}}=\frac{\Delta\text{v}}{\Delta\text{t}}=\frac{۲/۵\,\pi-۰}{۱}=۲/۵\pi\frac{\text{cm}}{s^{۲}}\ (✓)$$

۶ فنر قائمی از سقف یک آسانسور آویخته شده و وزنه‌ای به آن متصل است. آسانسور با شتاب ثابت $۴\,\frac{m}{s^{۲}}$ از حال سکون شروع به حرکت به سمت پایین می‌کند و طول فنر نسبت به حالتی که آسانسور ساکن است، $۲/۵\text{cm}$ تغییر می‌کند. اگر همین وزنه را به این فنر متصل کنیم تا نوسان هماهنگ ساده انجام دهد، بسامد نوسان چند هرتز می‌شود؟

$(\pi^{۲} \approx ۱۰, g = ۱۰\,\frac{m}{s^{۲}})$

- ۱) ۰/۲۵
- ۲) ۰/۵
- ۳) ۱
- ۴) ۲

پاسخ: **۴** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هنگامی که آسانسور، ساکن است، نیروی فنر برابر با وزن جسم است و داریم:

$$F_e = \text{mg} \Rightarrow \text{k}\Delta\text{L} = \text{mg} \quad (۱)$$

هنگامی که آسانسور با شتاب $۴\,\frac{m}{s^{۲}}$ به سمت پایین شروع به حرکت می‌کند، نیروی فنر برابر $m(g-a)$ است و داریم:

$$F'_e = m(g-a) \Rightarrow \text{k}\Delta\text{L}' = m(g-a) \quad (۲)$$

با تفریق رابطه‌ی (۲) از رابطه‌ی (۱) داریم:

$$\text{k}\Delta\text{L} - \text{k}\Delta\text{L}' = \text{mg} - m(g-a)$$

$$\Rightarrow \text{k}(\underbrace{\Delta\text{L}-\Delta\text{L}'}_{۲/۵\text{cm}}) = \text{ma} \xrightarrow{a=۴\,\frac{\text{m}}{\text{s}^{۲}}} \text{k}\times ۲/۵\times ۱۰^{-۲} = \text{m}\times ۴$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{۴}{۲/۵\times ۱۰^{-۲}} = ۱۶۰$$

بنابراین:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{۱۶۰} = ۴\sqrt{۱۰} \approx ۴\pi\,\frac{\text{rad}}{s}$$

در نتیجه:

$$f = \frac{\omega}{۲\pi} = \frac{۴\pi}{۲\pi} = ۲\text{Hz}$$

۷ فنری به ثابت k، وزنه‌ای به جرم $m_۱$ را با دوره‌ی تناوب $۴s$ روی سطح افقی به نوسان درمی‌آورد. همین فنر وزنه‌ای به جرم $m_۲$ را با دوره‌ی تناوب $۶s$ به نوسان درمی‌آورد. اگر به این فنر وزنه‌ای به جرم $m_۱ + ۲m_۲$ وصل کنیم، دوره‌ی تناوب نوسانات آن چند ثانیه خواهد بود؟ (سطح افقی بدون اصطکاک است.)

- ۱) $\sqrt{۲۲}$
- ۲) ۲
- ۳) $۲\sqrt{۲۲}$
- ۴) ۱

پاسخ: **۳** گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در حرکت نوسانی وزنه - فنر رابطه‌ی $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ برقرار است. بنابراین با استفاده از این رابطه ابتدا جرم وزنه‌ها را برحسب k محاسبه می‌کنیم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲\pi}{۴} = \sqrt{\frac{k}{m_۱}} \Rightarrow m_۱ = \frac{۴k}{\pi^{۲}} \\ \frac{۲\pi}{۶} = \sqrt{\frac{k}{m_۲}} \Rightarrow m_۲ = \frac{۹k}{\pi^{۲}} \end{cases}$$

حال باید دوباره با استفاده از همین رابطه دوره‌ی تناوب جسم به جرم $m_۱ + ۲m_۲$ را محاسبه کنیم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_۱ + ۲m_۲}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{۴k}{\pi^{۲}} + \frac{۱۸k}{\pi^{۲}}}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{۲۲k}{\pi^{۲}}}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\pi^{۲}}{۲۲}} = \frac{\pi}{\sqrt{۲۲}}\,\frac{\text{rad}}{s}$$

$$\omega = \frac{۲\cancel{\pi}}{T} = \frac{\cancel{\pi}}{\sqrt{۲۲}} \Rightarrow T = ۲\sqrt{۲۲}\,s$$

۸ طول آونگ ساده‌ای را ۱۷ سانتی‌متر تغییر می‌دهیم، دورهٔ آن ۱۲/۵ درصد افزایش می‌یابد. دورهٔ آونگ (قبل از تغییر طول) چند ثانیه است؟ $\left(g = \pi^{۲}\frac{m}{s^{۲}}\right)$

۱ ۱/۲

۲ ۱/۴

۳ ۱/۶

۴ ۱/۸

پاسخ: **۳** گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \frac{۱۱۲۵}{۱۰۰۰} = \sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}} \Rightarrow \frac{۸۱}{۶۴} = \frac{L_۱ + ۱۷}{L_۱}$$

$$L_۱ = ۶۴\text{cm} \Rightarrow T_۱ = ۲\pi\sqrt{\frac{\frac{۶۴}{۱۰۰}}{\pi^{۲}}} = ۱/۶s$$

۹ دورهٔ تناوب آونگ سادهٔ یک ساعت آونگ‌دار برابر ۱ ثانیه است. اگر طول این آونگ را ۴۴ درصد افزایش دهیم، در مدت یک دقیقه، این ساعت چند ثانیه، جلو یا عقب می‌افتد؟

۱ ۱۲، جلو می‌افتد.

۲ ۱۲، عقب می‌افتد.

۳ ۱۰، جلو می‌افتد.

۴ ۱۰، عقب می‌افتد.

پاسخ: **۴** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا دورهٔ تناوب آونگ ساعت را پس از افزایش طول در حالت دوم می‌یابیم:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}} \xrightarrow[T_۱=۱s]{L_۲=+۰/۴۴L_۱=۱/۴۴L_۱}$$

$$\frac{T_۲}{۱} = \sqrt{\frac{۱/۴۴L_۱}{L_۱}} \Rightarrow \frac{T_۲}{۱} = \sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۰۰}} \Rightarrow T_۲ = ۱/۲s$$

چون با افزایش طول آونگ دورهٔ تناوب آن افزایش یافته است، ساعت عقب می‌افتد. برای محاسبهٔ مدت زمان عقب افتادن ساعت، لازم است بدانیم در مدت $t = ۱\text{min} = ۶۰s$، آونگ اول چه تعداد نوسان بیشتر انجام می‌دهد. به همین منظور می‌توان نوشت:

$$N = N_۱ - N_۲ \xrightarrow{N=\frac{t}{T}} N = \frac{t}{T_۱} - \frac{t}{T_۲} \xrightarrow[t=۶۰s]{T_۱=۱s\,,\,T_۱=۱/۲s}$$

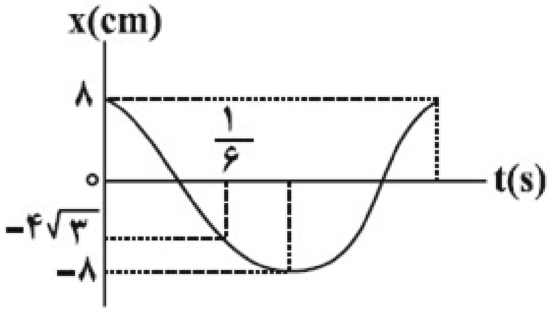
$$N = \frac{۶۰}{۱} - \frac{۶۰}{۱/۲} = ۶۰ - ۵۰ \Rightarrow N = ۱۰$$

بنابراین مدت زمان عقب افتادن ساعت برابر است با:

$$\Delta\text{t} = \text{NT}_۱ = ۱۰\times۱ \Rightarrow \Delta\text{t} = ۱۰s$$

یا می‌توان گفت آونگ ساعت در حالت دوم، در مدت $۶۰s$، تعداد $n_۲ = \frac{t}{T_۲} = \frac{۶۰}{۱/۲} = ۵۰$ نوسان کامل انجام می‌دهد. چون در هر نوسان به مدت $\Delta\text{T} = ۱/۲ - ۱ = ۰/۲s$ عقب می‌افتد، لذا در مدت $۶۰s$، به اندازهٔ $\Delta\text{t} = ۵۰\times۰/۲ = ۱۰s$ عقب خواهد افتاد.

۱۰ نمودار مکان - زمان یک آونگ ساده که در سطح زمین نوسانات کم‌دامنه انجام می‌دهد، به صورت شکل مقابل است. اگر این آونگ را به فاصلهٔ $۴R_e$ از سطح کرهٔ زمین منتقل کنیم، آونگ در هر دقیقه چند نوسان کامل انجام خواهد داد؟ (R_e شعاع کرهٔ زمین است.)



(۱) ۳۷/۵ (۲) ۱۲/۵ (۳) ۱۵ (۴) ۳۰

پاسخ: (۴) گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا دورهٔ نوسان‌های آونگ در سطح زمین را به دست می‌آوریم. با توجه به نمودار مکان - زمان $A = ۸\,\mathrm{cm}$ و در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۶}s$ مکان نوسانگر برابر $x = -۴\sqrt{۳}\,\mathrm{cm}$ و از نقطهٔ تعادل در حال دور شدن است. بنابراین داریم:

$$x = A\,\mathrm{Cos}\,\omega t \xrightarrow[x=-۴\sqrt{۳}\,\mathrm{cm}]{A=۸\,\mathrm{cm}\,,\,t=\frac{۱}{۶}s} -۴\sqrt{۳} = ۸\,\mathrm{Cos}\left(\omega\times\frac{۱}{۶}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cos}\left(\omega\times\frac{۱}{۶}\right) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\mathrm{Cos}\,\frac{۵\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \omega\times\frac{۱}{۶} = \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \omega = ۵\pi\frac{\mathrm{rad}}{s}$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow ۵\pi = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = ۰/۴s$$

اکنون اگر آونگ به فاصلهٔ ۴ Re از سطح زمین منتقل شود، فاصلهٔ آن از مرکز زمین برابر با $r_۲ = ۴\mathrm{Re} + \mathrm{Re} = ۵\,\mathrm{Re}$ خواهد شد و می‌توان نوشت:

$$g = \frac{\mathrm{GM}_e}{r^۲} \Rightarrow \frac{g_۲}{g_۱} = \left(\frac{r_۱}{r_۲}\right)^۲ \xrightarrow{r_۱=R_e\,,\,r_۲=۵R_e} \frac{g_۲}{g_۱} = \left(\frac{R_e}{۵R_e}\right)^۲ = \frac{۱}{۲۵}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \frac{\omega_۲}{\omega_۱} = \sqrt{\frac{g_۲}{g_۱}} = \sqrt{\frac{۱}{۲۵}} \Rightarrow \frac{\omega_۲}{\omega_۱} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \omega_۱ = ۵\omega_۲$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \frac{\omega_۱}{\omega_۲} \xrightarrow[\omega_۱=۵\omega_۲]{T_۱=۰/۴s} \frac{T_۲}{۰/۴} = \frac{۵\omega_۲}{\omega_۲} \Rightarrow T_۲ = ۲s$$

بنابراین آونگ در فاصلهٔ $۴R_e$ از سطح کرهٔ زمین در هر ۲ ثانیه یک نوسان کامل انجام می‌دهد، لذا در مدت یک دقیقه تعداد نوسانات آن برابر است با:

$$T = \frac{t}{n} \xrightarrow[T=۲s]{t=۱\mathrm{min}=۶۰s} ۲ = \frac{۶۰}{n} \Rightarrow n = ۳۰$$

۱۱ نخی به طول L را به سه قسمت تقسیم کرده و با آن‌ها سه آونگ ساده با دوره‌های T، $۲\mathrm{T}$ و $۳\mathrm{T}$ می‌سازیم. اگر طول آونگ وسطی برابر با $۴۰\mathrm{cm}$ باشد، طول نخ اولیه (L)، چند سانتی‌متر بوده است؟

۱ ۹۰ ۲ ۱۴۰ ۳ ۱۲۰ ۴ ۲۸۰

پاسخ: **۲** گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دوره‌ی آونگ، طبق رابطه‌ی $T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، با جذر طول آونگ، رابطه‌ی مستقیم دارد، پس اگر طول آونگ با دوره‌ی T را $L_۱$ در نظر بگیریم، طول آونگ با دوره‌ی $۲\mathrm{T}$ برابر $۴\mathrm{L}_۱$ و طول آونگ با دوره‌ی $۳\mathrm{T}$ برابر با $۹\mathrm{L}_۱$ خواهد بود، در نتیجه می‌توان نوشت:

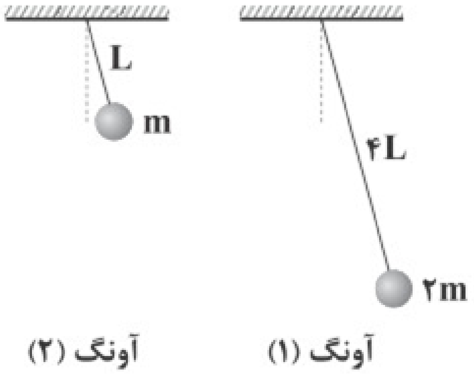
$$L_۲ = ۴\mathrm{L}_۱ = ۴۰\ \mathrm{cm} \Rightarrow L_۱ = \frac{۴۰}{۴} = ۱۰\ \mathrm{cm}$$

$$L_۳ = ۹\mathrm{L}_۱ = ۹۰\ \mathrm{cm}$$

بنابراین: طول نخ اولیه : $L = L_۱ + ۴\mathrm{L}_۱ + ۹\mathrm{L}_۱ = ۱۴\,L_۱$

$$\xrightarrow{L_۱=۱۰\ \mathrm{cm}} L = ۱۴\times۱۰ = ۱۴۰\,\mathrm{cm} \Rightarrow L = ۱۴۰\ \mathrm{cm}$$

۱۲ شکل زیر، دو آونگ ساده‌ی کم‌دامنه را نشان می‌دهد. اگر روی سطح زمین، تعداد نوسان‌های آونگ ۲ در هر دقیقه ۶۰ تا بیشتر از تعداد نوسان‌های آونگ ۱ باشد، بسامد نوسان آونگ ۱ در ارتفاع ۸۰۰ کیلومتری از سطح زمین چند هرتز است؟ (شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر است.)



۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{۱۶}{۹}$

۴) $\frac{۸}{۹}$

پاسخ: **۴** گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

گام اول: مقایسه‌ی بسامد آونگ‌ها:

$$f \propto \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \frac{f_۲}{f_۱} = \sqrt{\frac{L_۱}{L_۲}} = \sqrt{\frac{۴L}{L}} = ۲ \Rightarrow f_۲ = ۲f_۱$$

گام دوم: محاسبه‌ی بسامد هر یک از آونگ‌ها روی سطح زمین:

$$f = \frac{n}{t} \Rightarrow n = ft \xrightarrow{t=۶۰s} \begin{cases} n_۱ = ۶۰f_۱ \\ n_۲ = ۶۰f_۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{n_۲-n_۱=۶۰} ۶۰\,f_۲ - ۶۰\,f_۱ = ۶۰ \Rightarrow f_۲ - f_۱ = ۱$$

$$\xrightarrow{f_۲=۲f_۱} ۲f_۱ - f_۱ = ۱ \Rightarrow f_۱ = ۱\text{Hz}, f_۲ = ۲\text{Hz}$$

گام سوم: محاسبه‌ی بسامد آونگ (۱) در ارتفاع ۸۰۰ کیلومتری:

$$\begin{cases} g = G\frac{M_e}{r^۲} \\ f = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \end{cases} \Rightarrow f = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{GM_e}{Lr^۲}} \Rightarrow f \propto \frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{f'_۱}{f_۱} = \frac{r}{r'} = \frac{R_e}{R_e+h} \Rightarrow \frac{f'_۱}{۱} = \frac{۶۴۰۰}{۶۴۰۰+۸۰۰} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow f'_۱ = \frac{۸}{۹}\,\text{Hz}$$

۱۳ دوره تناوب دو آونگ ساده A و B در یک مکان به ترتیب ۱/۲s و ۱/۶s است. اگر با اتصال نخ این دو آونگ به یکدیگر آونگ ساده جدیدی که طول آن مجموع طول دو آونگ ساده A و B است بسازیم، این آونگ در مدت زمان ۵۶ ثانیه چند بار طول پاره‌خط نوسان را طی می‌کند؟

۱ ۵۶ **۲** ۴۰ **۳** ۲۰ **۴** ۲۸

پاسخ: **۱** گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه دوره تناوب آونگ‌های ساده، داریم:

$$\begin{cases} T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \to L_A=\frac{g}{۴\pi^۲}T_A^۲ \\ L_B=\frac{g}{۴\pi^۲}T_B^۲ \end{cases} \to L_A+L_B=\frac{g}{۴\pi^۲}\left(T_A^۲+T_B^۲\right)$$

$$T=۲\pi\frac{\sqrt{L_A+L_B}}{g}=۲\pi\sqrt{\frac{g}{۴\pi^۲}\frac{T_A^۲+T_B^۲}{g}}=\sqrt{T_A^۲+T_B^۲}$$

$$\to T=\sqrt{۱/۲^۲+۱/۶^۲}=۲$$

$$N=\frac{t}{T}\to N=\frac{۵۶}{۲}=۲۸$$

در هر نوسان، نوسانگر هماهنگ ساده، دو بار طول پاره‌خط را طی می‌کند، پس پاسخ ۵۶ بار خواهد بود.

۱۴ دو آونگ ساده هم طول m و n به ترتیب، در سطح زمین و در ارتفاع $۲\mathrm{Re}$ از سطح زمین به نوسان درمی‌آیند. دامنه نوسان آونگ m چند برابر دامنه نوسان آونگ n باشد تا بیشینه شتاب دو نوسانگر یکسان شود؟

۱ $\frac{۱}{۹}$ **۲** $\frac{۱}{۴}$ **۳** ۴ **۴** ۹

پاسخ: **۱** گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بیشینه شتاب نوسانگر هماهنگ ساده $\mathrm{A}\omega^۲$ است:

$$a_{\max}=\mathrm{A}\omega^۲=A\frac{g}{l}=A\frac{G\frac{M_e}{r^۲}}{l}$$

$$\frac{a_{\max_m}}{a_{\max_n}}=\frac{A_m}{A_n}\times\left(\frac{r_n}{r_m}\right)^۲\to ۱=\frac{A_m}{A_n}\times\left(\frac{۳\mathrm{Re}}{R_e}\right)^۲\to\frac{A_m}{A_n}=\frac{۱}{۹}$$

۱۵ آونگی از سقف آسانسوری که با شتاب ثابت $+۶\frac{m}{s^۲}$ رو به بالا در حرکت است، آویزان شده و حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اندازه شتاب حرکت آسانسور در حرکت رو به بالا چند $\frac{m}{s^۲}$ تغییر کند تا بیشینه تندی افقی گلوله متصل به آن، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر شود؟ (دامنه حرکت را ثابت فرض کنید.)

۱ ۱ **۲** ۲ **۳** ۴ **۴** ۵

پاسخ: **۳** گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بیشینه تندی گلوله $V_{\max}$ است:

$$V_{\max}=\mathrm{A}\omega\Rightarrow\frac{\mathrm{A}\omega_۲}{\mathrm{A}\omega_۱}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{\omega_۲}{\omega_۱}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g+a}{L}}\Rightarrow\frac{\omega_۲}{\omega_۱}=\sqrt{\frac{g+a_۲}{g+a_۱}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{g+a_۲}{g+۶}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۴۰+۴a_۲=۳۰+۱۸\Rightarrow a_۲=۲\frac{m}{s^۲}$$

$$\Rightarrow a_۱-a_۲=۶-۲=۴\frac{m}{s^۲}$$

شتاب حرکت باید $۴\frac{m}{s^۲}$ کاهش یابد.

۱۶ یک ساعت دیواری آونگ‌دار، در سطح زمین به درستی کار می‌کند. اگر این ساعت را به سطح سیاره‌ای منتقل کنیم که جرم آن ۴ برابر جرم زمین و چگالی آن $\frac{۱}{۱۶}$ برابر چگالی زمین باشد، در هر ۱۲ ساعتی که روی سطح زمین سپری می‌شود، این ساعت چند مدت زمانی عقب و یا جلو می‌افتد؟

۱) ۳ ساعت جلو می‌افتد.
۲) ۳ ساعت عقب می‌افتد.
۳) ۶ ساعت جلو می‌افتد.
۴) ۶ ساعت عقب می‌افتد.

پاسخ: **۴** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطهٔ چگالی داریم:

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}}\Rightarrow\frac{\rho'}{\rho_e}=\frac{M'}{M_e}\times\left(\frac{R_e}{R'}\right)^{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}=۴\times\left(\frac{R_e}{R'}\right)^{۳}\Rightarrow\frac{R_e}{R'}=\frac{۱}{۴}$$

حال با استفاده از رابطهٔ شتاب گرانشی، داریم:

$$g=G\frac{M}{R^{۲}}\Rightarrow\frac{g'}{g_e}=\frac{M'}{M_e}\times\left(\frac{R_e}{R'}\right)^{۲}\Rightarrow\frac{g'}{g}=۴\times\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\Rightarrow\frac{g'}{g}=\frac{۱}{۴}$$

در نهایت با استفاده از رابطهٔ دورهٔ تناوب یک آونگ ساده، داریم:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{g}{g'}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{۴}\Rightarrow\frac{T'}{T}=۲$$

دورهٔ تناوب آونگ ساعت در سطح کرهٔ موردنظر، دو برابر دورهٔ تناوب آن در سطح زمین است، بنابراین در هریک ساعت روی سطح زمین، این ساعت به اندازهٔ ۰/۵ ساعت عقب می‌افتد. در نتیجه در هر ۱۲ ساعت روی سطح زمین، این ساعت به اندازهٔ ۶ ساعت عقب خواهد ماند.

۱۷ دوره‌ی تناوب آونگ ساده‌ای که گلوله‌ی آن از جنس آهن است، $\frac{۱}{۲}$ ثانیه می‌باشد. به کمک یک آهن‌ربا، نیرویی برابر $\frac{۳}{۴}$ وزن گلوله در امتداد قائم و به طرف بالا بر گلوله وارد می‌کنیم. در این حالت آونگ چند بار در ثانیه نوسان خواهد کرد؟

۱) ۴
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۱

پاسخ: **۴** گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}\times\frac{g_۱}{g_۲}}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{۱}{\frac{۱}{۴}}}=۲\Rightarrow T_۲=۲\times\frac{۱}{۲}=۱s$$

آونگ یک بار در ثانیه نوسان خواهد کرد. ⇒

۱۸ یک آونگ به طول $۱m$ در حال نوسان روی یک پاره‌خط به طول $۴\ \mathrm{cm}$ است. حداقل مسافت پیموده شده از دامنه توسط این آونگ در بازه‌ی زمانی دلخواه $۰/۵s$ چند سانتی‌متر است؟ $(g=\pi^۲)$

۱ ۲

۲ $۲\sqrt{۲}$

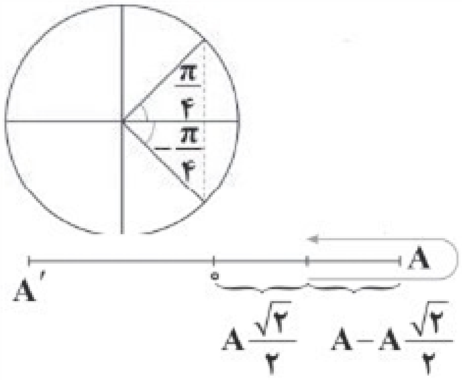
۳ $۲-\sqrt{۲}$

۴ $۴-۲\sqrt{۲}$

پاسخ: **۴** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا دوره ی تناوب آونگ را محاسبه می‌کنیم:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=۲\pi\sqrt{\frac{۱}{\pi^۲}}=۲s$$

منظور از بازه‌ی زمانی $۰/۵s$ معادل با $\frac{T}{۴}$ است که در این مدت نوسان‌گر به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ تغییر فاز می‌دهد. هر چه قدر نوسان‌گر به انتهای مسیر نزدیک‌تر باشد، سرعت حرکت آن کم‌تر است و در نتیجه مسافت کم تری توسط نوسان‌گر طی می‌شود. پس نوسان‌گر باید از فاز $-\frac{\pi}{۴}$ به $\frac{\pi}{۴}$ برسد و مسافت پیموده شده با توجه به شکل زیر برابر است با:



$$۲A=۴\mathrm{cm}\Rightarrow A=۲\ \mathrm{cm}\ \ (۱)$$

$$d=۲\left(A-A\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\Rightarrow d=۲A-A\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{(۱)} d=۴-۲\sqrt{۲}$$

۱۹ حداکثر سرعت یک آونگ ساده با زاویه‌ی انحراف ۳ درجه برابر $۰/۸\frac{m}{s}$ است. اگر حداکثر زاویه‌ی انحراف آونگ به $۱/۵$ درجه کاهش یابد، حداکثر سرعت آونگ چند متر بر ثانیه خواهد بود؟

۱ $۱/۶$

۲ $۰/۸$

۳ $۰/۴$

۴ $۰/۲$

پاسخ: **۳** گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با نصف شدن زاویه‌ی انحراف، دامنه‌ی نوسان هم نصف می‌شود. از طرفی می‌دانیم حداکثر سرعت آونگ در حرکت نوسانی از رابطه‌ی $v=\mathrm{A}\omega$ محاسبه می‌شود، بنابراین:

$$v=\mathrm{A}\omega\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{A_۲}{A_۱}\times\frac{\omega_۲}{\omega_۱}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۱}{۲}\times۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{v_۲}{۰/۸}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow v_۲=۰/۴\frac{m}{s}$$

دوره‌ی تناوب، تنها به طول نخ و شتاب بستگی دارد. به همین دلیل $\omega=\frac{۲\pi}{T}$ با تغییر دامنه تغییر نمی‌کند.

۲۰ حداکثر سرعت یک آونگ ساده با زاویه‌ی انحراف ۱/۵ درجه برابر $۰/۴\frac{m}{s}$ است. اگر حداکثر زاویه‌ی انحراف را به ۳ درجه افزایش دهیم، حداکثر سرعت آونگ چند متر بر ثانیه خواهد بود؟

۱ ۱/۶

۲ ۰/۸

۳ ۰/۴

۴ ۰/۲

پاسخ: **۲** گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنا به رابطه‌ی $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$، مقدار ω ثابت است. اما برای دامنه خواهیم داشت:

$$\theta=\frac{x}{L}\Rightarrow\theta_{\max}=\frac{x_{\max}}{L}=\frac{A}{L}\Rightarrow A=\theta_{\max}.L\Rightarrow\frac{A_۲}{A_۱}=\frac{\theta_{\max ۲}}{\theta_{\max ۱}}=۲$$

$$V_m=A\omega\Rightarrow\frac{V_{m_۲}}{V_{m_۱}}=\frac{A_۲}{A_۱}=۲\Rightarrow V_{m_۲}=۰/۴\times۲=۰/۸\frac{m}{s}$$

۲۱ آونگ ساده‌ای با دامنه کم در سطح زمین در مدت t، n نوسان کامل انجام می‌دهد. اگر این آونگ را به اندازه شعاع زمین از سطح زمین دور کنیم در چه مدتی بر حسب t، $۲n$ نوسان انجام خواهد داد؟

۱ $\frac{t}{۲}$ ۲ t ۳ $۲t$ ۴ $۴t$

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نسبت شتاب جاذبه زمین در این دو نقطه را به‌دست می‌آوریم:

$$g = G\frac{M}{(R+h)^{۲}} \Rightarrow \frac{g_{۲}}{g_{۱}} = \left(\frac{R}{R+R}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴}$$

نسبت دوره آونگ در دو نقطه برابر است با:

$$T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_{۲}}{T_{۱}} = \sqrt{\frac{g_{۱}}{g_{۲}}} = ۲ \Rightarrow \frac{T_{۲}}{۲T_{۱}} \Rightarrow \frac{t'}{۲n} = ۲\times\frac{t}{n} \Rightarrow t' = ۴t$$

۲۲ اگر به طول آونگ کم‌دامنه‌ای ۱۲۵ درصد اضافه شود، تعداد نوسان‌های آن در مدت ۴ دقیقه، ۵۰ تا کاسته می‌شود. دوره اولیه نوسان آونگ چند ثانیه بوده است؟ $(g = \pi^{۲})$

۱ ۲/۴ ۲ ۱/۸ ۳ ۱/۶ ۴ ۱/۲

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$n = \frac{t}{T} = \frac{t}{۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} = \frac{t}{۲\sqrt{L}}$$

$$n - n' = ۵۰ \Rightarrow \frac{t}{۲\sqrt{L}} - \frac{t}{۲\sqrt{L}'} = ۵۰$$

$$L' = L + \frac{۱۲۵}{۱۰۰}L = ۲/۲۵L, t = ۴\text{min} = ۲۴۰\text{s}$$

$$\Rightarrow \frac{۲۴}{\sqrt{L}} - \frac{۲۴}{۱/۵\sqrt{L}} = ۱۰ \Rightarrow \frac{۲۴۰}{۲\sqrt{L}} - \frac{۲۴۰}{۲\sqrt{۲/۲۵L}} = ۵۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{L} = \frac{۸}{۱۰} \Rightarrow L = ۰/۶۴\text{m} \Rightarrow \frac{۲۴}{\sqrt{L}} - \frac{۱۶}{\sqrt{L}} = ۱۰ \Rightarrow \frac{۸}{\sqrt{L}} = ۱۰$$

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = ۲\sqrt{L} = ۲\sqrt{۰/۶۴} = ۱/۶\text{s}$$

۲۳ دوره‌ی یک آونگ ساده در سطح زمین برابر یک ثانیه است. اگر طول آونگ را به $\frac{۱}{۴}$ مقدار اولیه رسانده و آن را در ارتفاعی برابر با شعاع زمین نسبت به سطح زمین قرار دهیم، دوره‌ی جدید چند ثانیه خواهد شد؟

۱ ۱ ۲ ۲π ۳ ۴ ۴ ۸π

پاسخ: ۱ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا شتاب گرانش را نسبت به سطح زمین می‌یابیم:

$$\frac{g_{۲}}{g_{۱}} = \left(\frac{Re}{Re+h}\right)^{۲} = \left(\frac{Re}{۲Re}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow g_{۲} = \frac{۱}{۴}g_{۱}$$

$$T' = ۲\pi\sqrt{\frac{L'}{g'}} = ۲\pi\sqrt{\frac{\frac{۱}{۴}L}{\frac{۱}{۴}g}} = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = T \Rightarrow T' = ۱s$$

۲۴ یک آونگ ساده که با دوره‌ی $T = ۲\text{s}$ نوسان می‌کند، از یک نخ سبک و یک گلوله‌ی آهنی تشکیل شده است. طول آونگ را به $\frac{۱}{۴}$ مقدار اولیه می‌رسانیم و توسط یک آهن‌ربا نیروی قائمی به اندازه‌ی ۳ برابر وزن گلوله به طرف پایین به آن وارد می‌کنیم. دوره‌ی آونگ چند ثانیه می‌شود؟

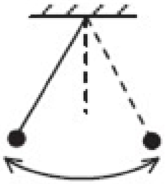
① $\frac{۱}{۴}$ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ ۲ ④ $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: ② گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. رابطه‌ی دوره‌ی تناوب آونگ به‌صورت $T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ است. هنگامی‌که به گلوله‌ی آونگ علاوه بر نیروی گرانش، نیروی قائم دیگری به طرف پایین وارد شود، شتاب ظاهری گرانش آن برابر با $g' = g + \frac{F}{M}$ می‌شود و می‌توان نوشت:

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{l_۲}{l_۱} \times \frac{g}{g + \frac{F}{m}}} = \sqrt{\frac{۱}{۴} \times \frac{g}{g + ۳\text{g}}} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{۱}{۱۶}} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{T_۱ = ۲\text{s}} T_۲ = \frac{۱}{۲}s$$

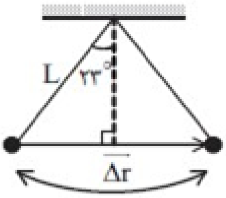
۲۵ یک آونگ به طول ۲۵ cm نوسان می‌کند، به طوری که حداکثر زاویه‌ی آن با امتداد قائم ۲۳° می‌شود و دوره‌ی نوسان آن یک ثانیه است. سرعت متوسط آونگ بین دو لحظه‌ی متوالی که سرعت آن صفر است، چند متر بر ثانیه است؟

$$\left(\text{Sin}\ ۲۳^\circ = \frac{۵}{۱۳}\right)$$



① $\frac{۲}{۱۳}$ ② $\frac{۳}{۱۳}$ ③ $\frac{۴}{۱۳}$ ④ $\frac{۵}{۱۳}$

پاسخ: ④ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



$$|\vec{\Delta r}| = ۲\text{L}\,\text{Sin}\,۲۳^\circ \Rightarrow |\vec{\Delta r}| = ۲ \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۵}{۲۶}\text{m}$$

$$\Delta t = \frac{\text{T}}{۲} = \frac{۱}{۲}\text{s} \Rightarrow \bar{\text{v}} = \frac{|\vec{\Delta r}|}{\Delta t} = \frac{۵}{۱۳}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱: نادرست است چون $f = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$

گزینه ۲: نادرست است چون دامنه همواره ثابت است.

گزینه ۴: نادرست است چون x متغیر است. $E_P = \frac{۱}{۲}\mathrm{Kx}^{۲}$

۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} a = -۱۰۰\pi^{۲} x \\ a = -\omega^{۲} x \end{cases} \Rightarrow \omega = ۱۰\pi \, \frac{\mathrm{rad}}{s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow ۱۰\pi = \sqrt{\frac{k}{۰/۱}} \Rightarrow k = ۱۰۰\pi^{۲} \times ۰/۱ = ۱۰۰ \frac{N}{m}$$

۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دقت کنید دوره هیچ ارتباطی به دامنه ندارد و با توجه به رابطه‌ی $T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ دوره‌ی حرکت دو نوسانگر یکسان است.

۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$۱/۲۵۶ = ۲ \times ۳/۱۴ \times \sqrt{\frac{۲}{k}} \Rightarrow ۱/۲۵۶ = ۶/۲۸\sqrt{\frac{۲}{k}} \Rightarrow \sqrt{\frac{۲}{k}} = \frac{۱/۲۵۶}{۶/۲۸} \Rightarrow \sqrt{\frac{۲}{k}} = ۰/۲$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{۲}{k} = ۰/۰۴ \Rightarrow k = \frac{۲}{۰/۰۴} = ۵۰ \frac{N}{m}$$

۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:

الف) از B تا O، تندی جسم در حال افزایش است، پس حرکت، تندشونده است و در حرکت تندشونده، بردار سرعت و شتاب هم‌سو هستند. (✓)

ب) بیشترین تندی برابر با $\mathrm{A}\omega$ است که طبق متن سؤال $A = ۵\mathrm{cm}$ است. هم‌چنین در حرکت نوسانی، جسم با فاصله‌ی زمانی $\frac{T}{۲}$ از مرکز نوسان می‌گذرد.

در نتیجه داریم:
$$\frac{T}{۲} = ۲\mathrm{s} \Rightarrow T = ۴\mathrm{s}$$

بنابراین:
$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}\left(\frac{\mathrm{rad}}{s}\right)$$

پس $v_{\max}$ برابر است با:

$$\Rightarrow v_{\max} = \mathrm{A}\omega \xrightarrow[\omega=\frac{\pi}{۲}\left(\frac{\mathrm{rad}}{s}\right)]{A=۵\mathrm{cm}} v_{\max} = ۵\times\frac{\pi}{۲} = ۲/۵\pi\,\frac{\mathrm{cm}}{s} \quad (\times)$$

ج) می‌دانیم ثابت فنر از رابطه‌ی $k = \mathrm{m}\omega^{۲}$ به دست می‌آید، پس:

$$k = \mathrm{m}\omega^{۲} \xrightarrow[\omega=\frac{\pi}{۲}\left(\frac{\mathrm{rad}}{s}\right)]{m=۳\ \mathrm{kg}} k = ۳\times\left(\frac{\pi}{۲}\right)^{۲} = \frac{۳\pi^{۲}}{۴}\,\frac{N}{m}\ (✓)$$

د) سرعت وزنه در نقطه‌ی B' صفر است و در نقطه‌ی O برابر $+\mathrm{A}\omega$ است (علت مثبت بودن این است که جهت حرکت به سمت راست می‌باشد). هم‌چنین فاصله‌ی زمانی از B' تا O برابر با $\frac{T}{۴}$ است، پس داریم:

$$\begin{cases} \Delta \mathrm{t} = \frac{T}{۴} = \frac{۴}{۴} = ۱\mathrm{s} \\ v_{B}' = ۰ \\ v_O = +\mathrm{A}\omega = ۲/۵\,\pi\,\frac{\mathrm{cm}}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{\mathrm{av}} = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{۲/۵\,\pi - ۰}{۱} = ۲/۵\pi\,\frac{\mathrm{cm}}{s^{۲}}\ (✓)$$

۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هنگامی که آسانسور، ساکن است، نیروی فنر برابر با وزن جسم است و داریم:

$$F_e = \mathrm{mg} \Rightarrow \mathrm{k}\Delta\mathrm{L} = \mathrm{mg} \quad (۱)$$

هنگامی که آسانسور با شتاب $۴\,\frac{m}{s^{۲}}$ به سمت پایین شروع به حرکت می‌کند، نیروی فنر برابر $m(g-a)$ است و داریم:

$$F'_e = m(g-a) \Rightarrow \mathrm{k}\Delta\mathrm{L}' = m(g-a) \quad (۲)$$

با تفریق رابطه‌ی (۲) از رابطه‌ی (۱) داریم:

$$\mathrm{k}\Delta\mathrm{L} - \mathrm{k}\Delta\mathrm{L}' = \mathrm{mg} - m(g-a)$$

$$\Rightarrow \mathrm{k}(\underbrace{\Delta\mathrm{L}-\Delta\mathrm{L}'}_{۲/۵\mathrm{cm}}) = \mathrm{ma} \xrightarrow{\mathrm{a}=۴\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{۲}}} \mathrm{k}\times ۲/۵\times ۱۰^{-۲} = \mathrm{m}\times ۴$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{۴}{۲/۵\times ۱۰^{-۲}} = ۱۶۰$$

بنابراین:
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{۱۶۰} = ۴\sqrt{۱۰} \approx ۴\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{s}$$

در نتیجه:
$$f = \frac{\omega}{۲\pi} = \frac{۴\pi}{۲\pi} = ۲\mathrm{Hz}$$

۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در حرکت نوسانی وزنه - فنر رابطه‌ی $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ برقرار است. بنابراین با استفاده از این رابطه ابتدا جرم وزنه‌ها را برحسب k محاسبه می‌کنیم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲\pi}{۴} = \sqrt{\frac{k}{m_۱}} \Rightarrow m_۱ = \frac{۴k}{\pi^۲} \\ \frac{۲\pi}{۶} = \sqrt{\frac{k}{m_۲}} \Rightarrow m_۲ = \frac{۹k}{\pi^۲} \end{cases}$$

حال باید دوباره با استفاده از همین رابطه دوره‌ی تناوب جسم به جرم $m_۱ + ۲m_۲$ را محاسبه کنیم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_۱ + ۲m_۲}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{۴k}{\pi^۲} + \frac{۱۸k}{\pi^۲}}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{۲۲k}{\pi^۲}}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\pi^۲}{۲۲}} = \frac{\pi}{\sqrt{۲۲}} \frac{\text{rad}}{s}$$

$$\omega = \frac{۲\cancel{\pi}}{T} = \frac{\cancel{\pi}}{\sqrt{۲۲}} \Rightarrow T = ۲\sqrt{۲۲}s$$

۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \frac{۱۱۲۵}{۱۰۰۰} = \sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}} \Rightarrow \frac{۸۱}{۶۴} = \frac{L_۱ + ۱۷}{L_۱}$$

$$L_۱ = ۶۴\text{cm} \Rightarrow T_۱ = ۲\pi\sqrt{\frac{\frac{۶۴}{۱۰۰}}{\pi^۲}} = ۱/۶s$$

۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا دورهٔ تناوب آونگ ساعت را پس از افزایش طول در حالت دوم می‌یابیم:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}} \xrightarrow[T_۱=۱s]{L_۲=+۰/۴۴L_۱=۱/۴۴L_۱}$$

$$\frac{T_۲}{۱} = \sqrt{\frac{۱/۴۴L_۱}{L_۱}} \Rightarrow \frac{T_۲}{۱} = \sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۰۰}} \Rightarrow T_۲ = ۱/۲s$$

چون با افزایش طول آونگ دورهٔ تناوب آن افزایش یافته است، ساعت عقب می‌افتد. برای محاسبهٔ مدت زمان عقب افتادن ساعت، لازم است بدانیم در مدت $t = ۱\text{min} = ۶۰s$، آونگ اول چه تعداد نوسان بیشتر انجام می‌دهد. به همین منظور می‌توان نوشت:

$$N = N_۱ - N_۲ \xrightarrow{N=\frac{t}{T}} N = \frac{t}{T_۱} - \frac{t}{T_۲} \xrightarrow[t=۶۰s]{T_۱=۱s\ ,\ T_۱=۱/۲s}$$

$$N = \frac{۶۰}{۱} - \frac{۶۰}{۱/۲} = ۶۰ - ۵۰ \Rightarrow N = ۱۰$$

بنابراین مدت زمان عقب افتادن ساعت برابر است با: $\Delta\text{t} = \text{NT}_۱ = ۱۰\times۱ \Rightarrow \Delta\text{t} = ۱۰s$

یا می‌توان گفت آونگ ساعت در حالت دوم، در مدت $۶۰s$، تعداد $۵۰ = \frac{۶۰}{۱/۲} = \frac{t}{T_۲} = n_۲$ نوسان کامل انجام می‌دهد. چون در هر نوسان به مدت $\Delta\text{T} = ۱/۲ - ۱ = ۰/۲s$ عقب می‌افتد، لذا در مدت $۶۰s$، به اندازهٔ $\Delta\text{t} = ۵۰\times۰/۲ = ۱۰s$ عقب خواهد افتاد.

۱۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا دورهٔ نوسان‌های آونگ در سطح زمین را به دست می‌آوریم. با توجه به نمودار مکان - زمان $A = ۸\,\text{cm}$ و در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۶}s$ مکان نوسانگر برابر $x = -۴\sqrt{۳}\,\text{cm}$ و از نقطهٔ تعادل در حال دور شدن است.

بنابراین داریم:

$$x = A\,\text{Cos}\,\omega t \xrightarrow[x=-۴\sqrt{۳}\text{ cm}]{A=۸\text{ cm}\ ,\ t=\frac{۱}{۶}s} -۴\sqrt{۳} = ۸\,\text{Cos}\left(\omega\times\frac{۱}{۶}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Cos}\left(\omega\times\frac{۱}{۶}\right) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\text{Cos}\,\frac{۵\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \omega\times\frac{۱}{۶} = \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \omega = ۵\pi\frac{\text{rad}}{s}$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow ۵\pi = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = ۰/۴s$$

اکنون اگر آونگ به فاصلهٔ ۴ Re از سطح زمین منتقل شود، فاصلهٔ آن از مرکز زمین برابر با $r_۲ = ۴\text{Re} + \text{Re} = ۵\,\text{Re}$ خواهد شد و می‌توان نوشت:

$$g = \frac{\text{GM}_e}{r^۲} \Rightarrow \frac{g_۲}{g_۱} = \left(\frac{r_۱}{r_۲}\right)^۲ \xrightarrow{r_۱=R_e\ ,\ r_۲=۵R_e} \frac{g_۲}{g_۱} = \left(\frac{R_e}{۵R_e}\right)^۲ = \frac{۱}{۲۵}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \frac{\omega_۲}{\omega_۱} = \sqrt{\frac{g_۲}{g_۱}} = \sqrt{\frac{۱}{۲۵}} \Rightarrow \frac{\omega_۲}{\omega_۱} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \omega_۱ = ۵\omega_۲$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \frac{\omega_۱}{\omega_۲} \xrightarrow[\omega_۱=۵\omega_۲]{T_۱=۰/۴s} \frac{T_۲}{۰/۴} = \frac{۵\omega_۲}{\omega_۲} \Rightarrow T_۲ = ۲s$$

بنابراین آونگ در فاصلهٔ $۴R_e$ از سطح کرهٔ زمین در هر ۲ ثانیه یک نوسان کامل انجام می‌دهد، لذا در مدت یک دقیقه تعداد نوسانات آن برابر است با: $T = \frac{t}{n} \xrightarrow[T=۲s]{t=۱\text{min}=۶۰s} ۲ = \frac{۶۰}{n} \Rightarrow n = ۳۰$

۱۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دوره‌ی آونگ، طبق رابطه‌ی $T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، با جذر طول آونگ، رابطه‌ی مستقیم دارد، پس اگر طول آونگ با دوره‌ی T را $L_۱$ در نظر بگیریم، طول آونگ با دوره‌ی ۲T برابر $۴\text{L}_۱$ و طول آونگ با دوره‌ی ۳T برابر با $۹\text{L}_۱$ خواهد بود، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$L_۲ = ۴\text{L}_۱ = ۴۰\text{ cm} \Rightarrow L_۱ = \frac{۴۰}{۴} = ۱۰\text{ cm}$$

$$L_۳ = ۹\text{L}_۱ = ۹۰\text{ cm}$$

بنابراین: طول نخ اولیه : $L = L_۱ + ۴\text{L}_۱ + ۹\text{L}_۱ = ۱۴\,L_۱$

$$\xrightarrow{L_۱=۱۰\text{ cm}} L = ۱۴\times۱۰ = ۱۴۰\text{ cm} \Rightarrow L = ۱۴۰\text{ cm}$$

۱۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

گام اول: مقایسه‌ی بسامد آونگ‌ها:

$$f \propto \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \frac{f_۲}{f_۱} = \sqrt{\frac{L_۱}{L_۲}} = \sqrt{\frac{۴\mathrm{L}}{L}} = ۲ \Rightarrow f_۲ = ۲\mathrm{f}_۱$$

گام دوم: محاسبه‌ی بسامد هر یک از آونگ‌ها روی سطح زمین:

$$f = \frac{n}{t} \Rightarrow n = \mathrm{ft} \xrightarrow{t=۶۰\mathrm{s}} \begin{cases} n_۱ = ۶۰\mathrm{f}_۱ \\ n_۲ = ۶۰\mathrm{f}_۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{n_۲ - n_۱ = ۶۰} ۶۰\ f_۲ - ۶۰\ f_۱ = ۶۰ \Rightarrow f_۲ - f_۱ = ۱$$

$$\xrightarrow{f_۲ = ۲\mathrm{f}_۱} ۲\mathrm{f}_۱ - f_۱ = ۱ \Rightarrow f_۱ = ۱\mathrm{Hz},\ f_۲ = ۲\mathrm{Hz}$$

گام سوم: محاسبه‌ی بسامد آونگ (۱) در ارتفاع ۸۰۰ کیلومتری:

$$\begin{cases} g = G\,\frac{M_e}{r^۲} \\ f = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \end{cases} \Rightarrow f = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{GM}_e}{\mathrm{Lr}^۲}} \Rightarrow f \propto \frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{f'_۱}{f_۱} = \frac{r}{r'} = \frac{R_e}{R_e + h} \Rightarrow \frac{f'_۱}{۱} = \frac{۶۴۰۰}{۶۴۰۰ + ۸۰۰} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow f'_۱ = \frac{۸}{۹}\,\mathrm{Hz}$$

۱۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه دوره تناوب آونگ‌های ساده، داریم:

$$\begin{cases} T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \to L_A = \frac{g}{۴\pi^۲}\,T_A^{\,۲} \\ \qquad\qquad L_B = \frac{g}{۴\pi^۲}\,T_B^{\,۲} \end{cases} \to L_A + L_B = \frac{g}{۴\pi^۲}\left(T_A^{\,۲} + T_B^{\,۲}\right)$$

$$T = ۲\pi\frac{\sqrt{L_A + L_B}}{g} = ۲\pi\sqrt{\frac{g}{۴\pi^۲}\,\frac{T_A^{\,۲} + T_B^{\,۲}}{g}} = \sqrt{T_A^{\,۲} + T_B^{\,۲}}$$

$$\to T = \sqrt{۱/۲^۲ + ۱/۶^۲} = ۲$$

$$N = \frac{t}{T} \to N = \frac{۵۶}{۲} = ۲۸$$

در هر نوسان، نوسانگر هماهنگ ساده، دو بار طول پاره‌خط را طی می‌کند، پس پاسخ ۵۶ بار خواهد بود.

۱۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بیشینه شتاب نوسانگر هماهنگ ساده $\mathrm{A}\omega^۲$ است:

$$a_{\max} = \mathrm{A}\omega^۲ = A\,\frac{g}{l} = A\frac{G\,\frac{M_e}{r^۲}}{l}$$

$$\frac{a_{\max_m}}{a_{\max_n}} = \frac{A_m}{A_n}\times\left(\frac{r_n}{r_m}\right)^۲ \to ۱ = \frac{A_m}{A_n}\times\left(\frac{۳\mathrm{Re}}{R_e}\right)^۲ \to \frac{A_m}{A_n} = \frac{۱}{۹}$$

۱۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بیشینه تندی گلوله $V_{\max}$ است:

$$V_{\max} = \mathrm{A}\omega \Rightarrow \frac{\mathrm{A}\omega_۲}{\mathrm{A}\omega_۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{\omega_۲}{\omega_۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g + a}{L}} \Rightarrow \frac{\omega_۲}{\omega_۱} = \sqrt{\frac{g + a_۲}{g + a_۱}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{g + a_۲}{g + ۶} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۴۰ + ۴a_۲ = ۳۰ + ۱۸ \Rightarrow a_۲ = ۲\,\frac{m}{s^۲}$$

$$\Rightarrow a_۱ - a_۲ = ۶ - ۲ = ۴\,\frac{m}{s^۲}$$

شتاب حرکت باید $۴\,\frac{m}{s^۲}$ کاهش یابد.

۱۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطهٔ چگالی داریم:

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{۴}{۳}\pi \mathrm{R}^{۳}}\Rightarrow\frac{\rho'}{\rho_e}=\frac{M'}{M_e}\times\left(\frac{R_e}{R'}\right)^{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}=۴\times\left(\frac{R_e}{R'}\right)^{۳}\Rightarrow\frac{R_e}{R'}=\frac{۱}{۴}$$

حال با استفاده از رابطهٔ شتاب گرانشی، داریم:

$$g=G\frac{M}{R^{۲}}\Rightarrow\frac{g'}{g_e}=\frac{M'}{M_e}\times\left(\frac{R_e}{R'}\right)^{۲}\Rightarrow\frac{g'}{g}=۴\times\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\Rightarrow\frac{g'}{g}=\frac{۱}{۴}$$

در نهایت با استفاده از رابطهٔ دورهٔ تناوب یک آونگ ساده، داریم:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{g}{g'}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{۴}\Rightarrow\frac{T'}{T}=۲$$

دورهٔ تناوب آونگ ساعت در سطح کرهٔ موردنظر، دو برابر دورهٔ تناوب آن در سطح زمین است، بنابراین در هریک ساعت روی سطح زمین، این ساعت به اندازهٔ $۰/۵$ ساعت عقب می‌افتد. در نتیجه در هر ۱۲ ساعت روی سطح زمین، این ساعت به اندازهٔ ۶ ساعت عقب خواهد ماند.

۱۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

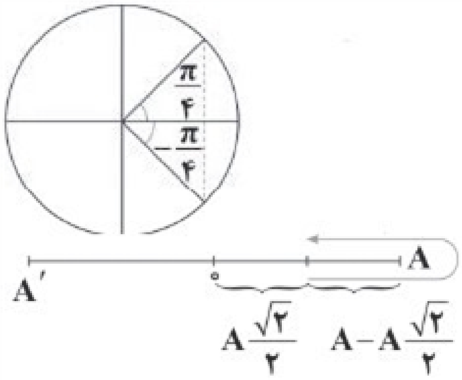
$$T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}\times\frac{g_۱}{g_۲}}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{۱}{\frac{۱}{۴}}}=۲\Rightarrow T_۲=۲\times\frac{۱}{۲}=۱s$$

⇒ آونگ یک بار در ثانیه نوسان خواهد کرد.

۱۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا دوره ی تناوب آونگ را محاسبه می‌کنیم:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=۲\pi\sqrt{\frac{۱}{\pi^{۲}}}=۲s$$

منظور از بازه‌ی زمانی $۰/۵s$ معادل با $\frac{T}{۴}$ است که در این مدت نوسان‌گر به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ تغییر فاز می‌دهد. هر چه قدر نوسان‌گر به انتهای مسیر نزدیک‌تر باشد، سرعت حرکت آن کم‌تر است و در نتیجه مسافت کم تری توسط نوسان‌گر طی می‌شود. پس نوسان‌گر باید از فاز $-\frac{\pi}{۴}$ به $\frac{\pi}{۴}$ برسد و مسافت پیموده شده با توجه به شکل زیر برابر است با:



$$۲A=۴\text{cm}\Rightarrow A=۲\text{ cm}\quad(۱)$$

$$d=۲\left(A-A\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\Rightarrow d=۲A-A\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{(۱)} d=۴-۲\sqrt{۲}$$

۱۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با نصف شدن زاویه‌ی انحراف، دامنه‌ی نوسان هم نصف می‌شود. از طرفی می‌دانیم حداکثر سرعت آونگ در حرکت نوسانی از رابطه‌ی $v=\mathrm{A}\omega$ محاسبه می‌شود، بنابراین:

$$v=\mathrm{A}\omega\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{A_۲}{A_۱}\times\frac{\omega_۲}{\omega_۱}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۱}{۲}\times۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{v_۲}{۰/۸}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow v_۲=۰/۴\frac{m}{s}$$

دوره‌ی تناوب، تنها به طول نخ و شتاب بستگی دارد. به همین دلیل $\omega=\frac{۲\pi}{T}$ با تغییر دامنه تغییر نمی‌کند.

۲۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنا به رابطه‌ی $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$، مقدار ω ثابت است. اما برای دامنه خواهیم داشت:

$$\theta=\frac{x}{L}\Rightarrow\theta_{\max}=\frac{x_{\max}}{L}=\frac{A}{L}\Rightarrow A=\theta_{\max}.L\Rightarrow\frac{A_۲}{A_۱}=\frac{\theta_{\max۲}}{\theta_{\max۱}}=۲$$

$$V_m=A\omega\Rightarrow\frac{V_{m_۲}}{V_{m_۱}}=\frac{A_۲}{A_۱}=۲\Rightarrow V_{m_۲}=۰/۴\times۲=۰/۸\frac{m}{s}$$

۲۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نسبت شتاب جاذبه زمین در این دو نقطه را به‌دست می‌آوریم:

$$g=G\frac{M}{(R+h)^۲}\Rightarrow\frac{g_۲}{g_۱}=\left(\frac{R}{R+R}\right)^۲=\frac{۱}{۴}$$

نسبت دوره آونگ در دو نقطه برابر است با:

$$T=\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{g_۱}{g_۲}}=۲\Rightarrow\frac{T_۲}{۲T_۱}\Rightarrow\frac{t'}{۲n}=۲\times\frac{t}{n}\Rightarrow t'=۴t$$

۲۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$n=\frac{t}{T}=\frac{t}{۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}=\frac{t}{۲\sqrt{L}}$$

$$n-n'=۵۰\Rightarrow\frac{t}{۲\sqrt{L}}-\frac{t}{۲\sqrt{L}'}=۵۰$$

$$L'=L+\frac{۱۲۵}{۱۰۰}L=۲/۲۵L,\ t=۴\text{min}=۲۴۰\text{s}$$

$$\Rightarrow\frac{۲۴}{\sqrt{L}}-\frac{۲۴}{۱/۵\sqrt{L}}=۱۰\Rightarrow\frac{۲۴۰}{۲\sqrt{L}}-\frac{۲۴۰}{۲\sqrt{۲/۲۵L}}=۵۰$$

$$\Rightarrow\sqrt{L}=\frac{۸}{۱۰}\Rightarrow L=۰/۶۴\text{m}\Rightarrow\frac{۲۴}{\sqrt{L}}-\frac{۱۶}{\sqrt{L}}=۱۰\Rightarrow\frac{۸}{\sqrt{L}}=۱۰$$

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=۲\sqrt{L}=۲\sqrt{۰/۶۴}=۱/۶\text{s}$$

۲۳ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا شتاب گرانش را نسبت به سطح زمین می‌یابیم:

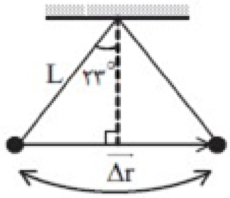
$$\frac{g_۲}{g_۱}=\left(\frac{Re}{Re+h}\right)^۲=\left(\frac{Re}{۲Re}\right)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow g_۲=\frac{۱}{۴}g_۱$$

$$T'=۲\pi\sqrt{\frac{L'}{g'}}=۲\pi\sqrt{\frac{\frac{۱}{۴}L}{\frac{۱}{۴}g}}=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=T\ \Rightarrow T'=۱s$$

۲۴ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. رابطه‌ی دوره‌ی تناوب آونگ به‌صورت $T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ است. هنگامی‌که به گلوله‌ی آونگ علاوه بر نیروی گرانش، نیروی قائم دیگری به طرف پایین وارد شود، شتاب ظاهری گرانش آن برابر با $g' = g + \frac{F}{M}$ می‌شود و می‌توان نوشت:

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{l_۲}{l_۱}\times\frac{g}{g+\frac{F}{m}}} = \sqrt{\frac{۱}{۴}\times\frac{g}{g+۳g}} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{۱}{۱۶}} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{T_۱=۲s} T_۲ = \frac{۱}{۲}s$$

۲۵ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



$$|\overrightarrow{\Delta r}| = ۲L\,Sin۲۳° \Rightarrow |\overrightarrow{\Delta r}| = ۲\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۵}{۱۳} = \frac{۵}{۲۶}m$$

$$\Delta t = \frac{T}{۲} = \frac{۱}{۲}s \Rightarrow \bar{v} = \frac{|\overrightarrow{\Delta r}|}{\Delta t} = \frac{۵}{۱۳}\frac{m}{s}$$

۱	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۲	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۳	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۴	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۵	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۶	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۷	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۸	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۹	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۰	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۱	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۳	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۴	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۶	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۷	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۸	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۹	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۲۰	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۲۲	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۲۳	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۲۴	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	[✓ ۴]